(Oor)aftelbaarheid

D.F.M. Strauss
Departement Filosofie
Universiteit van die Vrystaat
BLOEMFONTEIN
E-pos: dfms@cknet.co.za

Abstract

(Non)denumerability

The focus of this article is the rise of modern set theory which, according to Meschkowski, coincides with the first proof given in 1874 by Cantor of the non-denumerability of the real numbers. Later on he developed his well-known diagonal proof, which occupies a central position in this article. The argument of this article is directed towards the implicit supposition of the diagonal proof, to wit the acceptance of the actual infinite (preferably designated as the at once infinite). Without this assumption no conclusion to non-denumerability is possible. Various mathematicians and mathematical traditions of the twentieth century questioned the use of the actual infinite. A closer investigation is conducted in respect of two opponents of the actual infinite, namely Kaufmann and Wolff. The circular reasoning contained in their approach is highlighted and as alternative a non-circular understanding of the at once infinite is explained. At the same time the assumed exact nature (and neutrality) of mathematics is questioned (in the spirit of 'Koers' as a Christian academic journal). This contemplation disregards the question of what mathematics is (for example by including topology, category theory and topos theory), which would have diverted our attention to contemporary views of figures such as Tait, Penelope and Shapiro who, among others, acts as the editors of and contributors to the encompassing work 'Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic' (2005).

Opsomming

Ooraftelbaarheid

Hierdie artikel handel oor die ontstaan van die moderne versamelingsleer wat, volgens Meschkowski, saamval met die eerste bewys wat Cantor in 1874 gepubliseer het vir die ooraftel-

baarheid van die reële getalle. Later het Cantor sy bekende diagonaalbewys ontwikkel, wat die kern van hierdie artikel vorm. Die beredenering van die onderhawige artikel is gerig op die implisiete veronderstelling van die diagonaalbewys, naamlik die aanvaarding van die aktueel-oneindige (wat meer gepas die opeens-oneindige genoem kan word). Sonder hierdie aanname kan nie tot ooraftelbaarheid gekonkludeer word nie. Verskeie wiskundiges en wiskundige tradisies het gedurende die twintigste eeu die gebruik van die opeens-oneindige in die wiskunde bevraagteken. In die besonder word nader ingegaan op twee prominente teenstanders van die opeens-oneindige, naamlik Kaufmann en Wolff. Die sirkelredenasie wat in albei benaderings opgesluit lê, word uitgewys en as alternatief word 'n verantwoording van die gebruik van die opeens-oneindige verduidelik wat nie dit wat bewys wil word as uitgangspunt neem nie. Tegelyk word die beweerde eksaktheid (en neutraliteit) van die wiskunde bevraagteken (in die gees van 'Koers' as Christelik-wetenskaplike tydskrif). Hierdie besinning sien egter daarvan af om nader op die aard van die wiskunde in te gaan (deur byvoorbeeld ook die topologie, kategorieteorie en toposteorie te betrek) – wat ons gedagtegang sou heenvoer na die kontemporêre opvattings van persone soos Tait, Penelope en Shapiro, onder meer in hulle rol as redakteurs van en bydraers tot die omvangryke "Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic" (2005).

1. Inleidend

Om te kan *tel* is sekerlik een van die mees basiese vaardighede waaroor die mens beskik. Hierdie vermoë veronderstel uiteraard 'n *hoeveelheid* dinge wat getel kan word en sedert menseheugenis speel die mens se vingers 'n belangrike rol in die aanleer van telvaardighede. Dit is merkwaardig dat 'n blote besef van *menigvuldigheid* klaarblyklik die besef van *suksessie* voorafgaan – laasgenoemde besef ontwikkel eers teen die ouderdom van vyftien maande. Die klein kindjie kan onmiddellik sien of daar een, twee of drie voorwerpe voorhande is. Tog bestaan daar 'n meningsverskil oor die kwessie of "subitizing" (die *opeens* waarneming van 'n menigvuldigheid) nie in werklikheid 'n baie vinnige (opeenvolgende) telaksie verteenwoordig nie (vgl. Lakoff & Núñez, 2000:19-21).

Weliswaar kan dit geensins betwyfel word dat 'n menigvuldigheid voorwerpe *gelyktydig* (*opeens*) voorhande kan wees nie. 'n Mens verwys dikwels na die moontlikheid om dit wat teenwoordig of voorhande is oombliklik te *sien* deur gebruik te maak van die uitdrukking *met een oogopslag*. Wanneer daar meer as vier voorwerpe teenwoordig is, skiet die “een oogopslag” egter toenemend tekort. Om byvoorbeeld dertien van veertien voorwerpe te onderskei, word uiteindelik ’n beroep gedoen op die besef van volgorde, suksessie of opeenvolging, waarmee vanself teruggekeer word na die telaksie van een, nog een, en so meer. Die voorwerpe word dan letterlik *afgetel* om vas te stel hoeveelheid voorwerpe daar is. Slegs indien alle voorwerpe van mekaar *onderskei* kan word, word dit moontlik om die *hoeveelheid* daarvan vas te stel. Daar kan gevolglik ook van twee uitdrukkings gebruik gemaak word wat basies dieselfde sê: *onderskeie hoeveelheid* en *diskrete kwantiteit*.

Daar is egter ’n subtiele verskil tussen *onderskeie hoeveelheid* en *diskrete kwantiteit* indien die woord *onderskeie* verwys na dít wat deur die mens *onderskei is*. Enersyds hou onderskeiding verband met identifisering, en andersyds gaan die daadwerklike onderskeiding van ’n aantal voorwerpe gewoonlik met *telwoorde* gepaard: “een, twee, drie”, en so meer. Hierdie telwoorde (*numerals*) moet onderskei word van die gegewe (“nog-nie-getelde”) “aantalligheid” (*diskrete kwantiteit*) van dít wat getel (kan) word; met ander woorde dit wat *telbaar* is.

2. Eenheid in die menigvuldigheid

Hoewel die geskiedenis van die filosofie en wiskunde sekerlik deurgaans vertroud is met *aantalligheid* sowel as die *telbaarheid* van ’n gegewe menigvuldigheid, vind ’n mens die aanloop tot die voorstelling van ’n menigvuldigheid as ’n *eenheid* eers by Galileo in 1638. Sy klassieke argumentering handel oor die *hoeveelhede van kwadrate* (d.i. getalle soos 1, 4, 9, 16, 25, ens.). Van 1 tot 100 is daar tien kwadrate (nl. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 en 100). Dit wil sê tien van die eerste 100 (tel)getalle is kwadrate, of anders gestel, *een tiende* van die eerste 100 getalle is kwadrate (10 x 10 = 100).

Hoeveel kwadrate is daar van 1 tot 10 000? Uit die feit dat 10 000 gelyk is aan 100 x 100 (of: 100^2), blyk dat daar 100 kwadrate tussen 1 en 10 000 is – dit wil sê een honderdste van die eerste tienduisend (tel)getalle is kwadrate. Wat van een tot by ’n miljoen? Ook hier kan daarop gewys word dat 1 000 x 1 000 = 1 000 000, wat impliseer dat slegs *een duisendste* van die (tel)getalle van een tot ’n miljoen kwadrate is. Die patroon is duidelik – hoe verder ’n mens gaan hoe *minder* word die kwadrate in vergelyking met die gewone telgetalle: eers een tiende, dan ’n honderdste en dan slegs een duisendste.

Op hierdie punt draai Galileo egter die argument om deur te vra hoeveel *wortels* van kwadrate daar is – en dan blyk dit dat daar *ewe veel* is, aangesien die getal 1 die wortel van 1^2 is, 2 die wortel van 2^2 is, 3 die wortel van 3^2 is, ensovoorts.

1	2	3
1^2	2^2	3^2

Om aan die kwessie van "veel minder" en "ewe veel" te ontkom, het Galileo eenvoudig skuiling gesoek in die opmerking dat dit in die geval van die oneindige geen sin maak om van *gelyk* en *groter as,* of *kleiner as* te praat nie.

Dit sou egter nog 'n geruime tyd duur alvorens Bolzano, Dedekind en Cantor hierdie beswaar van Galileo sou omskep in 'n *definisie* van oneindigheid. Daarmee het hulle ook een van die twee belangrikste besware van Aristoteles teen die sogenaamde *aktueel-oneindige* beantwoord. Sedert Aristoteles word daar onderskei tussen die *potensieel*-oneindige en die *aktueel*-oneindige. In sy beroemde artikel oor die oneindige, waarin hy die nagedagtenis van Carl Weierstrass herdenk, het David Hilbert (1925:167) hierdie onderskeiding verduidelik deur te onderskei tussen die ry getalle 1, 2, 3, 4, ..., wat letterlik sonder einde (oneindig) is – dus die *potensieel*-oneindige, en die totaliteit van hierdie getallery (of die geheel van alle reële getalle tussen 0 en 1) wat *aktueel*-oneindig is. Met ander woorde, die getallery 1, 2, 3, 4, ... kan op twee maniere beskou word, naamlik as 'n wordende, potensieel-oneindige ry, of as 'n gegewe wat voltooid as 'n aktueel-oneindige totaliteit voorhande is. Net soos die getallery 1, 2, 3, 4, ... dus vanuit die perspektief van die twee oneindigheidsopvattings verstaan kan word, kan die woordjie *alle* 'n tweërlei inhoud ontvang, naamlik as letterlik *eindeloos* en alternatiewelik as 'n gegewe wat na 'n aktueel-oneindige totaliteit verwys. Wanneer Cantor self die onderskeiding tussen die potensieel- en aktueel-oneindige verduidelik, tipeer hy eersgenoemde as 'n veranderlike wat benede en bo alle grense toeneem, terwyl laasgenoemde 'n "quantum" is wat in al sy dele "vas en bepaald" is en tegelyk elke eindige grootte in omvang te bowe gaan (Cantor, 1962:401). Hierdie tipering verwoord die idee van 'n oneindige totaliteit wat deur Weierstrass, Dedekind en Cantor gebruik is om aan die limietbegrip 'n nuwe basis te gee, waarin limiete nie meer as die grenswaardes van konvergerende rye rasionale getalle "gedefinieer" is nie.

Aristoteles se beswaar teen die aktueel-oneindige was dat die geheel nie meer groter nie, maar gelyk aan ’n egte deel daarvan sou wees. Alvorens ons egter die onderskeiding tussen die *potensieel-oneindige* en die *aktueel-oneindige* nog nader toelig deur op die probleme rakende die idee van ooraftelbaarheid te wys, moet opgemerk word dat Bolzano, Dedekind en Cantor vir die eerste keer in die geskiedenis van die filosofie en die wiskunde begin het om *sistematies* aan ’n *gegewe menigvuldigheid* as ’n *eenheid* te dink. Die merkwaardige van hierdie ontwikkeling is dat dit om meer as ’n blote *getalseenheid* gegaan het. Dit handel naamlik oor die *eenheid* of *totaliteit* van ’n willekeurige *aantal* getalle. In Duits is die woorde *Mannigfaltigkeit* en *Menge* ekwivalente van die Engelse *set* en die Afrikaanse *versameling.* So ’n versameling word gekenmerk deur die feit dat dit gesien moet word as ’n *totaliteit* of ’n *geheel* wat *dele* besit. Met behulp van hierdie *geheel-dele-eienskap,* het Dedekind (1887:13) ’n oneindige versameling soos volg omskryf:

> ’n Sisteem *S* heet oneindig wanneer daar ’n egte deelversameling van *S* bestaan wat ekwivalent aan *S* is. Andersins word *S* eindig genoem. (§5, stelling 64.)

Die term *ekwivalent* dui op die bestaan van ’n bijeksie – f: $M \rightarrow N$. Hierin stem Dedekind en Cantor saam, want wanneer laasgenoemde sy algemene omskrywing van eindige en oneindige versamelings gee, staan die geheel-dele-relasie eweseer sentraal daarin. Volgens hom bestaan ’n versameling uit ’n duidelik onderskeie *aantal* elemente wat tot ’n *geheel* saamgevat is:

> Onder ’n ‘versameling’ verstaan ek elke samevatting *M* van bepaalde, wel-onderskeie objekte *m* van ons voorstelling of ons denke (wat die ‘elemente’ van *M* genoem word) tot ’n geheel [*zu einem Ganzen*]. (Cantor, 1895-1897:481; 1962:282.)

3. Is alle getalsversamelings aftelbaar?

Binne die kader van hierdie siening stel Cantor dat twee versamelings, *M* en *N, ekwivalent* is indien die elemente van *M* en die elemente van *N* een-eenduidig tot mekaar toegeorden (afgebeeld) kan word. Dit beteken dat met elke element van *M* ’n unieke element van *N* ooreenstem en omgekeerd. Soms praat Cantor ook van ’n omkeerbaar-eenduidige afbeelding. Uit die omskrywing van Dedekind (1887:13; hierbo aangehaal) volg dit dat die versameling natuurlike (tel)getalle volgens die versamelingsleer *oneindig* is, aangesien dit *ekwivalent* is aan ’n egte deelversameling daarvan – soos die versameling kwadrate of die positiewe ewegetalle. Alle versamelings wat ekwivalent aan die natuurlike getalle is, heet *aftelbaar-oneindig*.

Vergelyk ten opsigte van die vraag na aftelbaarheid die versameling heelgetalle, en wel in die lig van die volgende eenvoudige afbeelding wat die heelgetalle ook as *aftelbaar-oneindig* aandui:

1	2	3	4	5	6	7	...
0	+1	-1	+2	-2	+3	-3	

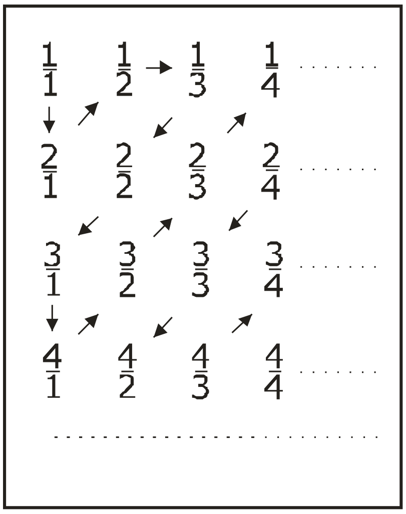
’n Eweknieekeurder suggereer dat ter wille van wiskundige duidelikheid die saak ook soos volg verduidelik kan word: Uit die bijeksie $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$ volg dat die versameling *Z* van heelgetalle aftelbaar-oneindig is, naamlik wanneer die bijeksie $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$ soos volg gedefinieer word:

$$f(n) \coloneqq \frac{n}{2} \text{ as } n \text{ ewe is; of aan } \frac{1-n}{2} \text{ as } n \text{ onewe is.}$$

In die geval van ’n eindige versameling kan die hele versameling nie een-eenduidig op ’n egte deelversameling daarvan afgebeeld word nie. Vanselfsprekend kan gevra word of die *rasionale* getalle ook afgetel kan word. Die antwoord is egter nie voor die hand liggend nie, want waar daar by natuurlike getalle sowel as heelgetalle sinvol sprake is van ’n *volgende* of ’n *vorige* getal, is dit sinloos om by rasionale getalle van ’n *volgende* of *vorige* getal te praat. Dit is immers altyd moontlik om die rekenkundige gemiddeld *r* van twee rasionale getalle *a* en *b* te bereken, en $a < r < b$. Hierdie proses kan onbeperk voortgesit word, aangesien die getalsverskil tussen twee rasionale getalle sonder einde verder verdeelbaar is. In aansluiting by Aristoteles, huldig Brouwer (1907) sowel as Weyl (1966:74; 1921:77) die oortuiging dat die kontinuum (of enige ruimte-interval) in wese *oneindig verdeelbaar* is.

Ten spyte van hierdie skynbare hindernis is dit tog moontlik om die rasionale getalle in rye en kolomme voor te stel. Vergelyk Skets 1 en neem in ag dat die pyltjies die aftelbaarheid van hierdie voorstelling weergee: 1 word gekorreleer met $\frac{1}{1}$; 2 met $\frac{2}{1}$; 3 met $\frac{1}{2}$; 4 met $\frac{1}{3}$; 5 met $\frac{2}{2}$; en so meer. Verskeie getalle word vanselfsprekend herhaaldelik in hierdie aftelling “raakgetel” soos $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, en so meer. Wat van belang is, is dat geen enkele rasionale getal aan hierdie aftelling kan ontkom nie.

Skets 1: Die aftelbaarheid van die rasionale getalle



Hiermee is slegs aangetoon dat die positiewe rasionale getalle aftelbaar-oneindig is. Wanneer al die tellers egter negatief gemaak word, is dit duidelik dat ook die negatiewe rasionale getalle aftelbaar-oneindig is.

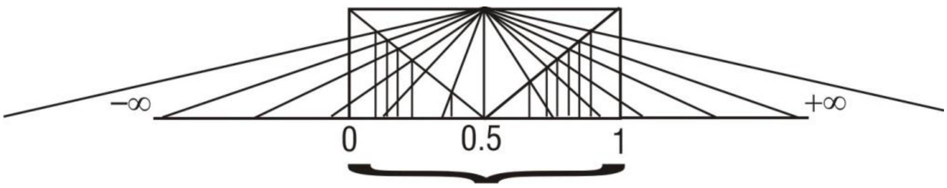
Dit lei natuurlikerwys na die vraag of die sogenaamde *irrasionale getalle* ook afgetel kan word? Neem hierby in ag dat die uitdrukking *rasionale getalle* twee onderskeie erfenisse beliggaam. Enersyds dui dit bloot op die *verhouding* of *ratio* tussen twee heelgetalle, en andersyds herberg dit die eerste krisis van die wiskunde toe sogenaamde "inkommensurabele" verhoudings aan die hand van 'n reëlmatige vyfhoek ontdek is (vgl. Von Fritz, 1945). In laasgenoemde geval het die woord *a-logos* die bykomende konnotasie van *rasioneel-onbegryplik* verkry (vgl. Szabo, 1961:440).

Die meer omvattende aanwysing is gegee in die aanduiding *reële getalle*, aangesien laasgenoemde die rasionale sowel as die irrasionale getalle omvat.

In 1874 het Cantor daarin geslaag om te bewys dat die reële getalle ooraftelbaar is. Meschkowski (1972) sien in hierdie bewys die ontstaan van die moderne wiskunde. Vir die eerste keer in die geskiedenis van die filosofie en die wiskunde word die sogenaamde *aktueel-oneindige* vrugbaar in 'n wiskundige bewys benut (vgl. Cantor, 1962:278-281).

Om vas te stel of die reële getalle aftelbaar-oneindig is, hoef ons bloot na die geslote interval tussen 0 en 1 te kyk: [0,1]. Daar is immers net so veel punte op 'n reguit lyn tussen 0 en 1, as wat daar op 'n oneindige reguit lyn is. Omdat dit 'n oneindige versameling is, kan die punte van die hele lyn een-eenduidig op ’n deelversameling (naamlik die punte tussen 0 en 1) afgebeeld word, soos in Skets 2 verduidelik word. Elke punt op die oneindige reguit lyn besit ’n “beeld-punt” op een van die twee diagonale (0 tot by 0,5; of 0,5 tot by 1) en elkeen van hierdie “beeldpunte” korreleer met ’n punt tussen 0 en 1, waaruit volg dat daar net so veel punte tussen 0 en 1 is as wat op die hele lyn is. (In Skets 2 word die simbole !∞ en +∞ gebruik om die idee van ’n oneindige lyn aan te dui.)

Skets 2: Net so veel punte tussen 0 en 1 as op ’n oneindige reguit lyn



Cantor maak nou ’n belangrike aanname. Hy begin met die veronderstelling dat ons wel alle reële getalle tussen 0 en 1 in ’n orde van aftelling gerangskik het. Vergelyk die aftelbare aantal desimale breuke:

$$\begin{array}{lllllll}
a_1 & = & 0, & a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots & a_{1m} \ldots \\
a_2 & = & 0, & a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots & a_{2m} \ldots \\
a_3 & = & 0, & a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots & a_{3m} \ldots \\
\ldots & & & & & & \\
a_n & = & 0, & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots & a_{nm} \ldots \\
\ldots & & & & & &
\end{array}$$

Konstrueer nou ’n desimale breuk $b = 0\ b_1\ b_2\ b_3 \ldots b_n \ldots$ sodanig dat $b_n \neq a_{nn}$; dan is *b* van elke a_1 verskillend, aangesien dit in minstens een syfer van a_1 afwyk en gevolglik nie in die veronderstelde orde van aftelling opgeneem kan wees nie.

Dieselfde argument kan ook soos volg gevoer word: Cantor se bewys van die ooraftelbaarheid van die reële getalle ontgin eweseer die gegewe dat elke reële getal in hierdie geslote interval [0,1] as ’n oneindige desimale breuk voorgestel kan word – en wel in die vorm van $x_n = 0.a_1a_2a_3a_4 \ldots$ (getalle met twee desimale voorstellings, soos 1,0000 ... en 0,9999 ..., word deurgaans in die vorm met neges voorgestel). Veronderstel nou weereens dat daar ’n aftelling x_1, x_2,

x_3, ... van alle reële getalle in die interval bestaan, dit is van alle reële getalle in die interval $0 \leq x_n \leq 1$, naamlik:

Skets 3: Cantor se diagonaalbewys

$$x_1 = 0.a_1a_2a_3 \ldots\ldots\ldots$$
$$x_2 = 0.b_1b_2b_3 \ldots\ldots\ldots$$
$$x_3 = 0.c_1c_2c_3 \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Konstrueer nou ’n getal *y* = 0.$y_1y_2y_3$ ... sodanig dat y_n in die eerste desimale plek van x_1 verskil (d.w.s. $y_1 \neq a_1$), in die tweede desimale plek van x_2 (d.w.s. $y_2 \neq b_2$), en so meer. Die diagonaalpyl in Skets 3 dui aan dat *y* van elke x_n in minstens één desimale plek sal verskil (naamlik die n^{de} plek). Dit beteken dat *y* nie “raakgetel” is in die veronderstelde *aftelling* van *alle* reële getalle nie. Aangesien die algebraïese getalle aftelbaar is, maar alle reële getalle nie aftelbaar is nie, volg dit dat die transendente getalle soos π en *e ooraftelbaar* is. (Die diagonaalbewys van Cantor toon dus aan dat daar sowel ’n ooraftelbare hoeveelheid *irrasionale* as *transendente getalle* bestaan. Dit word gedoen sonder om ’n enkele irrasionale of transendente getal te konstrueer!)

Elkeen wat onmiddellik beïndruk is met die skynbare “eksaktheid” van Cantor se diagonaalbewys, sal verbaas wees om te verneem dat van die mees gesaghebbende wiskundiges ooraftelbaarheid (eintlik die aktueel-oneindige waarop ons hieronder terugkom) bevraagteken het. Dit is onder meer bevraagteken deur Poincaré, Brouwer en Weyl (in die eerste helfte van die twintigste eeu), en Robinson, Wolff, Lorenzen en die logikus Dummett (in die tweede helfte van die vorige eeu). Die “bewys” word nie bevraagteken nie, maar hulle argumente ontken dat ooraftelbaarheid daaruit afgelei kan word.

In die beredenering wat volg sal aangetoon word dat hierdie divergensie deur die enkele groot veronderstelling van die diagonaalbewys veroorsaak word, naamlik die aanname dat enige aftelbaaroneindige versameling van getalle beskou kan word asof dit oneindige totaliteit is wat gelyktydig aanwesig is. Die vertrekpunt van die diagonaalbewys is immers dat aangeneem word dat *alle* reële getalle in die geslote interval [0,1] as ’n oneindige totaliteit opeens voorhande is. (Daar is reeds vroeër na Hilbert se verduideliking van die verskil tussen die potensieel- en aktueel-oneindige verwys.) Hierdie twee tradisionele tiperings bevat egter geen intuïtiewe appèl nie. Om aan hierdie tekortkoming te ontkom, sal daar soms, as alternatief vir die aanduidings potensieel- en aktueel-oneindig, verwys word na die *suksessief-oneindige* en die *opeens-oneindige*.

4. Bevraagtekening van die diagonaalbewys

Die begin van die twintigste eeu is gekenmerk deur 'n blinde vertroue in die vermeende *eksaktheid* en betroubaarheid van die wiskunde. Die wêreld se vooraanstaande wiskundige in 1900 was die Fransman Henrí Poincaré. By die tweede internasionale wiskundekongres wat in dieselfde jaar in Parys plaasgevind het, het hy triomfantelik beweer dat die wiskunde absolute eksaktheid bereik het. Hy was egter onbewus van die ontdekking van "inkonsistente versamelings", soos Cantor dit reeds in 1895 genoem het. Dit was 'n gegewe wat sowel Russell as Zermelo gedurende 1900 in die volgende vorm "ontdek" het (vgl. Husserl, 1979:xxii, 399 ff.):

> Beskou die versameling C van alle versamelings wat hulself nie as element bevat nie, en vra dan of C 'n element van sigself is al dan nie. Die antwoord op hierdie vraag toon aan dat, indien C 'n element van sigself is, dit nie 'n element van sigself mag wees nie, en dat indien dit *nie* 'n element van sigself is nie, dit juis aan die voorwaarde wat gestel is om 'n element van sigself te wees, beantwoord. Derhalwe C is 'n element van C as en slegs as C nie 'n element van C is nie.

Na aanleiding van hierdie ontdekking het Fraenkel en sy medeouteurs in 1973 die volgende veelseggende opmerking in reaksie op Poincaré se aanspraak gemaak:

> Ironically enough, at the very same time that Poincaré made his proud claim, it has already turned out that the theory of the infinite systems of integers – nothing else but part of set theory – was very far from having obtained absolute security of foundations. More than the mere appearance of antinomies in the basis of set theory, and thereby of analysis, it is the fact that the various attempts to overcome these antinomies, ... revealed a far-going and surprising divergence of opinions and conceptions on the most fundamental mathematical notions, such as set and number themselves, which induces us to speak of the third foundational crisis that mathematics is still undergoing. (Fraenkel *et al*., 1973:14.)

Reeds in sy proefskrif, “Over de Grondslagen der Wiskunde”, het die Nederlandse intuïsionistiese wiskundige, L.E.J. Brouwer (1907), ooraftelbaarheid bevraagteken, alhoewel sy eie beredenering sowel as dié van Heyting dubbelsinnig was. Dieselfde kan van Poincaré gesê word, want aan die een kant verwerp hy die aktueel- (opeens-) oneindige, maar aan die ander kant probeer hy in dieselfde artikel ’n alternatiewe bewys vir die ooraftelbaarheid van die reële getalle gee (vgl. Poincaré, 1910), sonder om enige blyk daarvan te gee dat hy besef ooraftelbaarheid kan slegs “bewys” word indien die aktueel- (opeens-)oneindige (implisiet) aanvaar word.

Ons let vervolgens op twee verteenwoordigende negatiewe reaksies op die diagonaalbewys van Cantor – onderskeidelik uit die eerste helfte van die twintigste eeu dié van Felix Kaufmann (1930) en die meer resente argumentasie van Karl-Heinz Wolff (vgl. Wolff, 2010a; 2010b; 2010c; 2010d).

4.1 Felix Kaufmann

Kaufmann rig eers sy kritiek op die versameling natuurlike getalle wat volgens die versamelingsleer ’n een-eenduidige afbeelding tussen die hele versameling en ’n egte deelversameling daarvan moontlik maak. Hy meen dat hierdie skynbaar onbetwyfelbare een-eenduidige korrelasie nogtans iets paradoksaals inhou, naamlik dat die geheel nie meer groter as ’n deel is nie. Hy haal aan wat Leibniz in ’n brief aan Bernoulli geskryf het, naamlik dat “die aantal of versameling van alle getalle ’n teenspraak bevat indien dit as ’n geheel gesien word” (Kaufmann [1930:140] verwys na die Gerhardt-uitgawe van Leibniz se *Mathematische Schriften*, 3:536). Die kritiek van Kaufmann ontken byvoorbeeld geensins dat elke willekeurige *natuurlike getal* “omkeerbaar-eenduidig” met ’n *ewe getal* afgepaar kan word nie. Wat hy wel bevraagteken, is dat uit hierdie basiese gegewe afgelei kan word dat die versameling van *alle* natuurlike getalle “daarom” een-eenduidig op die versameling van *alle* ewe getalle afgebeeld kan word. In laasgenoemde geval word die idee van ’n oneindige totaliteit ingespan – iets wat volgens Kaufmann ontoelaatbaar is. Hy beroep hom op die bekende uitspraak van Gauss wat die volgende in ’n brief aan Schumacher in 1831 geskryf het:

> ... so protesteer ek ... teen die gebruik van ’n oneindige grootte as iets voltooids, wat in die wiskunde nooit veroorloof is nie. Die oneindige is slegs ’n ‘façon de parler’, ... (Kaufmann, 1930:141-142; vgl. Becker, 1964:180).

Kaufmann redeneer dat selfs wanneer die "hele" versameling natuurlike getalle een-eenduidig op 'n egte deelversameling daarvan afgebeeld word, die afparing van die n^{de} element nog steeds geen grond bied om enige uitspraak te maak oor *alle* natuurlike getalle, of *alle* heelgetalle, of *alle* kwadrate nie. Solank vasgehou word aan 'n "konstruksiewet" (*Bildungsgesetz*) is enige ry natuurlike getalle (heelgetalle of kwadrate) eenvoudig 'n eindelose suksessie. Daarom funksioneer die klassieke versamelingsleer volgens Kaufmann op grond van 'n ontoelaatbare *skeiding* van een-eenduidige afbeeldings van die elemente van versamelings, en die (suksessiewe) toe-ordening van hierdie elemente. Dit geskied op grond van die aanname van 'n oneindige totaliteit (Kaufmann, 1930:143). Hy beskou hierdie "valse aanname" van die aktueel- (opeens-)oneindige, waarvolgens dit gesien word as 'n "totaliteit van diskrete elemente", as die hoofrede vir die onhoudbaarheid van Cantor se diagonaalbewys rakende die ooraftelbaarheid van die reële getalle (Kaufmann, 1930:145).

Soos alreeds aangetoon, gaan Cantor se diagonaalbewys uit van die aanname dat alle reële getalle tussen 0 en 1 as 'n aftelbaar-oneindige *totaliteit* aanwesig is. Dieselfde aanname geld ten opsigte van die desimale ontwikkeling van elke reële getal. Lorenzen (1972: 163) wat die idee van oneindige totaliteite verwerp, merk by geleentheid die volgende op:

> 'n [M]ens stel veeleerder die reële getalle voor as almal werklik teenwoordig – selfs elke reële getal word so voorgestel as 'n oneindige desimaal-breuk, asof die oneindige aantal syfers almal opeens bestaan (*alle auf einmal existierten*).

Indien hierdie veronderstelling verwerp word, soos Kaufmann inderdaad doen, toon die diagonaalbewys van Cantor glad nie enige ooraftelbaarheid aan nie. Hy wys eerstens daarop dat elke oneindige desimale breuk bloot 'n simbool vir 'n aftelbare ry natuurlike getalle is. Wat die diagonaalbewys aantoon, is die volgende: vir 'n (aftelbare) ry van aftelbare rye natuurlike getalle kan 'n verdere aftelbare ry natuurlike getalle gedefinieer word wat nie in die voorgemelde (aftelbare) ry van (aftelbare) rye natuurlike getalle vervat is nie (Kaufmann, 1930:145). Let daarop dat wat Kaufmann as "aftelbaar" aandui, in hierdie artikel deurgaans aftelbaar-oneindig genoem word.

Hierdie siening aanvaar Cantor se diagonaalbewys, maar omdat dit geen oneindige totaliteit toelaat nie, kan ooraftelbaarheid nie daaruit afgelei word nie (vgl. ook Heyting, 1971:40; Fraenkel *et al*., 1973:256, 272; Fraenkel, 1928:239, nota 1). Die vroeë intuïsionis en tydgenoot van Cantor, Leopold Kronecker, het die idee van ’n oneindige totaliteit (soms ook die *voltooid-oneindige* genoem) verwerp en daarna gestrewe om die wiskunde volledig vanuit eindige natuurlike getalle op te bou (vgl. Scholz, 1969:293-294). Vroeër is na ’n ander verteenwoordiger van die intuïsionistiese wiskunde, Henri Poincaré, verwys. Hy was bekend as die grootste wiskundige van sy tyd totdat David Hilbert hierdie faam by hom oorgeneem het met sy afsterwe in 1912. Poincaré het ook uitdruklik die voltooid-oneindige verwerp. Indien afgesien is van die onderlinge ordeverhouding tussen die elemente van ’n versameling, praat Cantor van die *kardinaliteit* of *magtigheid* daarvan – in onderskeiding van *ordinale getalle* waar juis gelet word op die ordeverhouding tussen die elemente daarvan (kleiner as, gelyk aan, of groter as). Die kardinaliteit van die kleinste meer-as-eindige (trans-eindige) ordinaalgetal omega (ω), gee Cantor aan as aleph-nul ($\aleph_0$), wat vir hom die kleinste meer-as-eindige kardinaalgetal verteenwoordig. Met behulp van die magsversameling (die versameling van alle deelversamelings) van omega kom hy dan tot die volgende meer-as-eindige kardinaalgetal aleph-een ($\aleph_1$), en so meer. Poincaré (1910: 48) merk egter op:

> Met betrekking tot die tweede meer-as-eindige kardinaalgetal aleph-een is ek nie regtig heeltemal oortuig dat dit bestaan nie ... (en) of ons sonder teenspraak van die kardinaliteit daarvan kan praat nie. Die aktueel-oneindige bestaan in elk geval nie.

Kronecker en Poincaré sit hiermee bloot ’n gedagtegang voort wat teruggryp na Aristoteles, naamlik dat oneindigheid slegs as *potensialiteit* bestaan en daarom altyd onvoltooid bly. Becker merk op dat hierdie opvatting van Aristoteles die onbetwiste algemene erfenis van alle wiskundiges (indien nie ook alle filosowe nie) gebly het, totdat dit deur Cantor aan die einde van die negentiende eeu bevraagteken is (Becker, 1964:69). Die intuïsionistiese tradisie, waarby ook Kaufmann aansluiting gevind het, is onder meer voortgesit deur Weyl, Heyting, Van Dalen, Troelstra en in die besonder deur Dummett. In Dummett se geval is dit opvallend dat hy die idee van ’n oneindige totaliteit verwerp, maar tegelyk onproblematies van “an infinite domain” praat (vgl. Dummett, 1977:22, 24, 57, 58, 59, 63) sonder enige besef van die feit dat “totaliteit” en “domein” eintlik wisselterme vir die geheelelement van die ruimtelike geheel-dele relasie is.

Die aristoteliaanse tradisie word ook in die resente denke van Karl-Heinz Wolff gevind – die volgende wiskundige waaraan aandag geskenk word.

4.2 Karl-Heinz Wolff

Wolff is van mening dat Cantor se diagonaalbewys in ’n innerlike teenstrydigheid vasgevang is. Hy rig sy argument spesifiek teen die *diagonaalgetal* en poog om aan te toon dat elke sodanige bewys van die ooraftelbaarheid van die reële getalle tussen 0 en 1 tot ’n teenstrydigheid lei. Sy argumentasie berus op twee aannames:

- Bewyse soos dit deur Cantor aangewend is, moet op die een of ander tydstip deur ’n persoon *(P)* aangevoer word.
- Sulke bewyse moet in die vorm van ’n mededeling *(M)* voorgelê kan word (soos hieronder deur hom gedefinieer).

Sonder om op sy tegniese uiteensetting in te gaan, word die resultaat van sy beredenering bloot uitgelig. Wolff meen dat Cantor met hierdie diagonaalbewys die sprong van die potensieel-oneindige na die aktueel-oneindige wou voltrek. Hy noem dit ook die tree van *aftelbaarheid* na *ooraftelbaarheid*. Hy ondersoek hierdie gedagte vervolgens aan die hand van die voorbeeld van die natuurlike getalle, waar daar vir elke “hoe-groot-ook-al” natuurlike getal N ’n groter natuurlike getal N+1 gevind kan word, en vir elke versameling natuurlike getalle *nuwe* getalle. Die versameling natuurlike getalle kan nooit uitgeput word nie. Die feit dat daar geen grootste natuurlike getal bestaan nie, word met die teken ∞ aangedui: ’n getal wat gedefinieer word met die eienskap dat $\forall n : \infty > n$. Wolff beskou die tree van die natuurlike getalle na ∞ as die stap van die potensieel-oneindige na die aktueel-oneindige – wat volgens hom parallel loop met) die oorgang van die *aftelbare* na die *ooraftelbare*. Dit is volgens hom die tree na die kontinuum. Bykomend merk Wolff op dat deur die oneindige (∞) te betrek, daar “met een slag” die totaliteit van alle natuurlike getalle omvat word [“*Durch die Einbeziehung von* (∞) *wird ‘mit einem Schlag’ die Gesamtheit aller natürlichen Zahlen erfasst*” (Wolff, 2010b)].

Wat die kontinuum betref, onderskei Wolff twee perspektiewe. Indien ’n mens die omgewing van ’n punt (wat deur ruimtekoördinate vasgelê is) as ’n kontinuum beskryf, en indien jy die weg na die punt en die weg van die punt betrag, deurloop hierdie weg in ’n toereikende klein omgewing van die punt die plekke *kontinuum* → *punt* → *kontinuum*. Iets soortgelyks gebeur by die versameling punte wat deur koördinate vasgelê is, want dan is die weg van ander punte tot ’n punt dieselfde as van ’n punt tot ander punte: *ander punte* → *punt* → *ander punte*.

Wolff meen dat die deurslaggewende punt by die betrekking van die "getal" ∞ is. Die versameling punte wat deur koördinate vasgelê kan word, word daardeur onbegrens. Dit bly egter desnieteenstaande aftelbaar, want alles speel sig in die sfeer van moontlike aftelbare denkobjekte af. 'n Mens moet steeds in gedagte hou dat die ry punte wat deur hierdie toe-ordening verkry is, nie daadwerklik met hulle bypassende koördinate aangegee kan word nie. Daarom kan die magtigheid van die natuurlike getalle nooit oorskry word nie en slegs 'n potensieel-oneindige versameling sonder enige teenstrydigheid kan bedink word – iets wat nie van die aktueel-oneindige gesê kan word nie. "Elke aktueel-oneindige lei tot 'n teenstrydigheid." (Wolff, 2010c; 2010d).

5. Die sirkelredenasie onderliggend aan die besware teen die diagonaalbewys van Cantor

Hierbo is opgemerk dat Aristoteles se afwysing van die aktueel-oneindige wat impliseer dat die geheel nie meer groter nie, maar gelyk (*ekwivalent*) aan 'n deel daarvan is, juis deur Dedekind as die bepalende kenmerk van die aktueel-oneindige uitgelig is. Sodra die aktueel-oneindige egter verwerp word, is dit onmoontlik om ooraftelbaarheid uit Cantor se diagonaalbewys af te lei. Die formulerings van Kaufmann en andere (waaronder dié van Brouwer, Becker & Wolff) is in hierdie opsig logies nie-strydig (*consistent*).

Wanneer *slegs* die potensieel-oneindige toegelaat word, kan inderdaad geen beswaar teen die redenasie van Kaufmann en Wolff geopper word nie. Die bewys van Cantor staan en val immers met die beginaanname dat *alle* reële getalle tussen 0 en 1 as 'n aftelbaar-oneindige menigvuldigheid gegee is, dit wil sê dat hulle almal gelyktydig (opeens) as 'n oneindige totaliteit voorhande is. Omdat Wolff telkens van "alle moontlike" denkobjekte praat sonder om daarmee ruimte te laat vir die opeens-gegewendheid van daardie objekte, is dit duidelik dat die term *alle* dubbelsinnig is – soos reeds hierbo vermeld met Hilbert se verduideliking van die verskil tussen die potensieel-oneindige en aktueel-oneindige. Indien die oneindige terselfdertyd eksklusief as iets "onvoltooibaars" gesien word (potensieel-oneindig), kan die aktueel-oneindige nie bestaan nie. Hier sou ook na Ludwig Fischer verwys kon word wanneer hy die aard van irrasionale getalle altyd afhanklik stel van 'n konstruksiereël wat deurgaans 'n "eindelose" of "onvoltooide proses" impliseer. Indien 'n irrasionale getal as "gegewe" beskou word, beteken dit dat dit beskou moet word as die *voltooiing* van hierdie onvoltooide proses.

Volgens hom blyk daaruit die innerlik-kontradiktoriese en fiktiewe karakter van die irrasionale getalle (Fischer, 1933:113-114).

Die feit dat die onderskeiding tussen die potensieel-oneindige en die aktueel-oneindige ook deur die teenstelling tussen onvoltooid-oneindig en voltooid-oneindig tot uitdrukking gebring word, verwys terug na die 1831-uitspraak van Gauss wat vroeër aangehaal is:

> ... so protesteer ek ... teen die gebruik van ’n oneindige grootte as iets voltooids, wat in die wiskunde nooit veroorloof is nie (Kaufmann, 1930:141-142; vgl. Becker, 1964:180).

Deur van die voltooid-oneindige te praat, word egter iets fundamenteel-misleidends na vore gebring, want hierdie spreekwyse suggereer dat dit inderdaad moontlik is om die suksessie van getalle wat in ’n getallery voorkom, tot ’n einde te bring. Dit sal letterlik beteken dat die eindelose *beëindig* is, met ander woorde dat dit wel tot ’n einde gekom het. Die werklike betekenis van die oneindige as dit wat *sonder einde* (*on-eindig*) is, word dan opgehef. Die suksessief-oneindige is gebonde aan die aritmetiese orde van opeenvolging en verteenwoordig daarmee die oorspronklike betekenis van getal, soos treffend weerspieël in die begrip *aftelbaarheid* wat deur Cantor ingevoer is. Immanuel Kant het reeds (aritmetiese) *suksessie* as ’n *modus* van die tyd gesien. Hierdie getaltydsorde verskil van die ruimtelike en kinematiese tydsordes wat ánder tyds*modi* belig, by name die ruimtelike tydsorde van *gelyktydigheid* en die kinematiese tydsorde van konstante *duur*. Kant gebruik die Duitse terme *Folge*, *Zugleichsein* en *Beharrlichkeit* (“Die drei modi der Zeit sind *Beharrlichkeit*, *Folge* und *Zugleichsein*”; Kant, 1987 [1787]:219). Dit is egter veral die aard van *gelyktydigheid* wat dwarsdeur die geskiedenis probleme veroorsaak het. Nadat irrasionale getalle ontdek is, het die Griekse wiskundiges immers hulle oriëntasie van getal na ruimte verskuif (die geometrisering van die wiskunde) en dit het die vertrekpunt vir ’n intellektuele erfenis van tydloosheid (= ewigheid) geskep. ’n Tydstip, die *hede* (analoog aan ruimtelike gelyktydigheid), is verhef tot die vlak van *tydloosheid* – dink slegs aan Kierkegaard se *nunc aeternum* (die *ewige nou*), wat teruggryp na ewigheid as die *tydlose hede* by Plotinus (Plotinus, 1984:3.7), Boethius (vgl. sy *Consolatio philosophiae* waar hy ewigheid omskryf as *interminabilis vitae tota simul et perfecta possession* – die “totaal-gelyktydige perfekte besit van onbegrensde lewe”; Echternach, 1972:841), Augustinus (2006:11.11.13; *De Trinitate* 112.14), Thomas Aquinas (1945: 1.10) en Schilder (1953:61).

Solank die aktueel-oneindige egter bloot as die *voltooid-oneindige* aangedui word, sal die besware wat persone soos Kronecker, Brouwer, Becker, Kaufmann, Fischer en Wolff daarteen formuleer hulle geldigheid behou, want dit is inderdaad teenstrydig om die *eindeloosheid* van die suksessief-oneindige as iets *voltooids* te beskou. Die vraag is egter of die aktueel-oneindige ook op ’n ander wyse ingevoer kan word?

So ’n moontlikheid is inderdaad opgesluit in die alternatiewe aanduiding van die aktueel-oneindige, wat net terloops hierbo vermeld is, naamlik die opeens-oneindige. In onderskeiding van die aard van ’n blote *getalsopeenvolging* of *suksessie,* appelleer die idee van die opeens-oneindige op die *gelyktydige* aanwesigheid van ’n menigvuldigheid as ’n oneindige totaliteit. Indien gelyktydigheid nie tot suksessie herleibaar is nie, sal dit beteken dat die opeens-oneindige ook nie tot die suksessief-oneindige herlei kan word nie. Hoewel die geskiedenis van die wiskunde gedobber het tussen die uiterstes van ’n aritmetiserende en ’n geometriserende benadering, is dit merkwaardig dat daar nooit aandag gegee is aan die alternatief waarin die uniekheid (onherleibaarheid) en die onverbreeklik-wederkerige samehang van getal en ruimte ontgin is nie. Dit is inderdaad wat nodig is om die aard van die opeens-oneindige in sy eie reg te fundeer. Daar moet egter nie alleen bykomende struktuurelemente van die ruimte-aspek in verrekening gebring word nie, want enkele algemene eienskappe van die aspekte van die werklikheid sal ook betrek moet word, by name die wyse waarop analogiese struktuurmomente die samehang tussen aspekte belig, en in die besonder die implikasies van die aard van die ruimtelike geheel-delerelasie vir ’n fundering van die opeens-oneindige.

Die blote opeenvolging van getalle onderlê die aard van die suksessief-oneindige sonder dat enige appèl op gelyktydigheid (opeens) gemaak hoef te word. Elke ruimtefiguur moet egter in die uitgebreidheid daarvan alle dele gelyktydig teenwoordig hê – ’n reëlmatige vyfhoek kan nie in “suksessie” bestaan nie, dit wil sê dat ons geen reëlmatige vyfhoek het indien ons eers die een sy, dan die volgende sy, en opeenvolgend die ander sye het nie. Al vyf die sye moet *gelyktydig* (*opeens*) gegee wees indien dit inderdaad om ’n reëlmatige vyfhoek gaan. Dus moet die geheel en al die dele daarvan *gelyktydig* teenwoordig wees. Hieruit blyk genoegsaam dat elke feitelik-uitgebreide ruimtefiguur bepaal word deur die ruimtelike orde van gelyktydigheid. Uit die gegewe dat enigiets wat kontinu uitgebreid is bykomend sonder einde (dus: suksessief-oneindig) verder verdeel kan word, volg dit dat die oorspronklike aritmetiese sin van die suksessief-oneindige (analogies) binne die aard van die ruimte-aspek gereflekteer word. Gesien vanuit die perspektief van die ruimte-aspek kan gestel word dat die suksessief-oneindige verdeelbaarheid van ruimtelike kontinuïteit terugwys na die suksessief-oneindige in die getalsaspek.

Vanuit die perspektief van die getalsaspek kan vasgestel word dat enige (suksessief-oneindige) getallery analogies vooruit na die aard van ruimtelike gelyktydigheid kan wys. Wat gebeur is dat 'n mens se besinning, onder leiding van jou teoretiese denke, die oorspronklike getalsin van oneindigheid (die suksessief-oneindige) verdiep en ontsluit deur dit vooruitwysend te betrek op die aard van ruimtelike gelyktydigheid. Enige suksessief-oneindige getallery kan dan beskou word *asof al* die elemente daarvan *opeens* as 'n *oneindige totaliteit* gegee is (bv. deur alle natuurlike getalle op die punte van 'n reguit lyn tussen 0 en 1 met behulp van die afbeelding $\frac{1}{n}$ af te beeld). Die gewone aritmetiese suksessie wat gegee is wanneer $n \to \infty$ (n strewe na oneindig) kan dus op 'n onontslote (nie-verdiepte), of op 'n verdiepte, of (teoreties-) ontslote wyse betrag word (vgl. Strauss, 2009:240-241). Dus beliggaam die opeens-oneindige die vooruitwysende (antisiperend-analogiese) samehang tussen die getals- en ruimte-aspekte. Terwyl ooraftelbaarheid slegs "bewys" kan word indien die opeens-oneindige benut word, beteken dit dat enige poging om die unieke sin van ruimte tot getal met behulp van die opeens-oneindige te herlei, in die sirkelredenasie vasloop dat dit in die eerste plek die onherleibaarheid van die ruimtelike tydsorde van opeens veronderstel (benodig). Dit impliseer dat ruimte tot getal herlei kan word slegs en slegs indien dit nie daartoe herlei kan word nie. Grünbaum moes dus in sy poging om die uitgebreide lineêre kontinuum uit elemente wat nie uitgebreid is nie te konstrueer (*degenerate intervals*), toegee dat sy hele argument deurslaggewend afhang van die ooraftelbaarheid van die reële getalle (vgl. Grünbaum, 1952:302).

Al bogemelde besware teen Cantor se diagonaalbewys berus in die laaste instansie op die beperkende aanname dat niks anders as die *suksessief-oneindige* kan bestaan nie. Wie egter ook die opeens-oneindige as *regulatiewe hipotese* invoer, kan dit (implisiet of eksplisiet) slegs doen deur hulle op die uniekheid en onherleibaarheid van die ruimtelike geheel-delerelasie te beroep en samehangend daarmee op die (ewe onherleibare) ruimtelike tydsorde van gelyktydigheid. Die benutting van die opeens-oneindige elimineer nogtans nie die suksessief-oneindige nie, maar veronderstel dit. Wie egter slegs aan die suksessief-oneindige erkenning verleen en dit as basis gebruik om die opeens-oneindige af te wys, verval in ’n sirkel-redenasie omdat uitgegaan word van dit wat aangetoon wil word, naamlik dat slegs die suksessief-oneindige bestaan. Die enigste moontlikheid wat bestaan om die opeens-oneindige in die onherlei-baarheid daarvan te fundeer, berus op ’n erkenning van die onher-leibaarheid van die getals- en ruimte-aspekte (met hulle inherente onderskeie tydsordes: *suksessie* en *gelyktydigheid*).

Benewens die lang geskiedenis waarin die opeens-oneindige met die *hede*, met *tydloosheid* en *gelyktydigheid* verbind is, het ons ge-sien dat ’n wiskundige uit die konstruksionistiese skool, Paul Loren-zen, ’n duidelike besef het van waarom dit eintlik gaan, ten spyte van die feit dat hy self saam met die intuïsionisme slegs aan die suksessief-oneindige erkenning verleen. Lorenzen wys daarop dat die klassieke wiskunde elke reële getal as ’n oneindige desimale breuk voorstel asof (*als ob*) die oneindige hoeveelheid getalle almal *opeens* bestaan (*auf einmal existierten*) (Lorenzen, 1972:163). Hier-die spreekwyse beklemtoon dat *getal* as sodanig geen motief bied vir die invoering van die opeens-oneindige nie (vgl. Lorenzen, 1972:159). Vanuit ’n ander gesigspunt stel Körner dat die basiese verskil tussen die *aritmetika* en die *wiskundige analise* in die klas-sieke vorm daarvan, daarin geleë is dat laasgenoemde reële getalle definieer met behulp van oneindige totaliteite (*aktual unendlicher Gesamtheiten*; Körner, 1972:134). Hieruit tree die enge verbonden-heid van die ruimtelike tydsorde van *opeens* en die ruimtelike *geheel-delerelasie* na vore. Addisioneel in hierdie konteks kan daar-op gewys word dat David Hilbert se medewerker wat hom by-gestaan het in sy twee dekadelange ondersoek na ’n teenspraak-vrye fundering van die wiskunde, Paul Bernays, eweveel van ’n “asof”-benadering ten opsigte van die opeens-oneindige gebruik maak (met eksplisiete afwysing van Vaihinger se filosofie van die “asof”, waar die *aktueel-oneindige* as iets innerlik-teenstrydig wat wel nuttige resultate oplewer, beskou word). Teenoor Vaihinger ver-dedig Bernays ook die opeens-oneindige in ’n *asof* sin, maar hy ontken dat die opeens-oneindige innerlik-teenstrydig van aard is (Meschkowski Bernays, 1976:60).

Terloops kan hierby opgemerk word dat Robinson, wie onafhanklik van Laugwitz ’n nie-standaardanalise ontwikkel het waarin van “oneindig-klein” getalle gebruik gemaak word (vgl. Robinson, 1966: 55 ff.), self twyfel oor die bestaan van die *aktueel-oneindige* (*op-eens-oneindige*) omdat hy daarvoor nog steeds die suksessief-oneindige as maatstaf aanlê. Hy stel immers dat die idee van oneindige totaliteite letterlik sinloos is:

> ... infinite totalities do not exist in any sense of the word (that is, either really or ideally). More precisely, any mention, or purported mention, of infinite totalities is, literally, meaningless.

Nogtans glo hy terselfdertyd dat die wiskunde soos gewoonlik moet voortgaan, “that is, we should act *as if* (kursivering – DFMS) infinite totalities really existed” (Robinson, 1979:507). Slegs wanneer die suksessief-oneindige as eksklusiewe maatstaf aangewend word, kan die idee van oneindige totaliteite as sinloos gediskwalifiseer word (vgl. Strauss, 2009:242).

6. Samevattende opmerking

Wanneer Wolff die voorwaarde stel dat ’n reële getal “teenspraakvry” as “denkobjek” deur ’n persoon (P) op ’n gegewe tydstip beskryf is, verbind hy hom tot die eksklusiewe gelding van die suksessief-oneindige. Enige wiskundige poging om in ’n bewys van die opeens-oneindige gebruik te maak, word by voorbaat gediskwalifiseer omdat daar *per definisie* daarvan uitgegaan word dat die idee van ’n oneindige totaliteit teenstrydig is. Dit kom daarop neer dat ’n getalsmatige opeenvolging aanvaar word ten koste van *ruimtelike gelyktydigheid*. Daarmee word die vooruitwysende (antisiperende) samehang tussen getal en ruimte ten slotte misken, asook die uniekheid en onherleibaarheid van getal en ruimte. Wanneer enige suksessief-oneindige ry getalle egter vanuit die verdiepende perspektief van die *regulatiewe hipotese* van die opeens-oneindige beskou word, word die sin van die suksessief-oneindige nie *misken* nie, maar slegs *ontsluit*. Sonder hierdie ontsluiting en verdieping van die oorspronklike sin van getal, verval die moontlikheid van *oneindige totaliteite*, van die opeens-*oneindige* as sodanig, en daarmee saam ook Cantor se bewys van die ooraftelbaarheid van reële getalle.

Indien daar nie daarvan uitgegaan kan word dat alle reële getalle tussen 0 en 1 as ’n oneindige totaliteit opeens voorhande is nie, verloor Cantor se diagonaalbewys sy gelding. Met ander woorde, indien alle desimale breuke tussen 0 en 1 nie beskou word *asof* die elemente daarvan as ’n oneindige totaliteit gelyktydig gegee is nie, kan ooraftelbaarheid nooit aangetoon word nie. Dan verander die diagonaalargument bloot tot die konstatering dat vir ’n gegewe aftelbare (suksessief-oneindige) ry van (suksessief-oneindige) aftelbare rye getalle, nóg een gekonstrueer kan word wat van elkeen van die gegewe aftelbare (suksessief-oneindige) ry van (suksessief-oneindige) aftelbare rye getalle verskil. Daar is dan nêrens in hierdie interpretasie van die diagonaalkonstruksie enigsins sprake van *ooraftelbaarheid* nie.

Wanneer rekenskap gegee word van die samehang tussen méér as een aspek (in hierdie geval die vooruitwysende samehang tussen getal en ruimte) beland 'n mens onherroeplik in filosofiese (wysgerige) vaarwater (vgl. Strauss, 2009, hfst. 2: veral p. 48-60). 'n Beperkte (onontslote) siening van hierdie samehang laat slegs ruimte vir die *suksessief-oneindige* wat geen ooraftelbaarheidskonklusie uit die diagonaalargument ondersteun nie. 'n Ruimtelik-verdiepte (-ontslote) visie wat gebruik maak van die opeens-oneindige kan enige (suksessief-oneindige) aftelbare getallery as 'n oneindige *geheel* (totaliteit) beskou wat *opeens* gegee is. Hierdie sienswyse open die enigste weg om uit Cantor se diagonaalbewys tot ooraftelbaarheid as gevolgtrekking te kom.

Hoewel die diagonaalbewys van Cantor met die eerste oogopslag derhalwe volkome geldig en eksak skyn te wees, veroorsaak alternatiewe oneindigheidsopvattings twee teenstrydige resultate, waaruit duidelik blyk dat selfs die wiskunde nie volledig eksak is nie. Alternatiewe wysgerige sienings rakende die uniekheid en samehang van getal en ruimte gee aanleiding tot alternatiewe oneindigheidsopvattings wat op hulle beurt die diagonaalbewys tot teenstrydige gevolgtrekkings voer.

Geraadpleegde bronne

AQUINAS, T. 1945. Basic writings of Thomas Aquinas: annotated with an introduction by Anton C. Pegis. New York: Random House.

AUGUSTINUS, A. 2006. Confessiones. Indianapolis: Hackett.

BECKER, O. 1964. Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Freiburg: Alber.

BECKER, O., *Hsrg*. 1965. Zur Geschichte der griechischen Mathematik. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

BROUWER, L.E.J. 1907. Over de grondslagen der Wiskunde. Amsterdam: Maas & Van Suchtelen.

CANTOR, G. 1895-1897. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. (*In Mathematische Annalen*, 46:481–512; 49:207-246 – ook opgeneem in Cantor, 1962:282-356.)

CANTOR, G. 1962 [1932]. Gesammelte Abhandlungen Mathematischen und Philosophischen Inhalts. Hildesheim: Oldenburg Verlag.

DEDEKIND, R. 1887. Was sind und was sollen die Zahlen? Brauschweig: Friederich Vieweg.

DUMMETT, M. 1977. Elements of Intuitionism. Oxford: Clarendon.

ECHTERNACH, H. 1972. Ewigkeit. (*In* Ritter, J., Gründer, K. & Gabriel, G., *Hrsg.* Historisches Wörterbuch der Philosophie. Basel-Stuttgart: Schwabe. Tl. 2:841.)

FISCHER, L. 1933 Die Grundlagen der Philosophie und der Mathematik, Leipzig: Felix Meiner Verlag. http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/zamm.19420220315/abstract Datum van gebruik: 10 Des. 2010.

FRAENKEL, A. 1928. Einleitung in die Mengenlehre. Berlin: Springer.

FRAENKEL, A., BAR-HILLEL, Y., LEVY, A. & VAN DALEN, D. 1973. Foundations of set theory. Amsterdam: North Holland.

GALILEO, G. 1973 [1638]. Unterredungen und mathematische Demonstration über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

GRÜNBAUM, A. 1952. A consistent conception of the extended linear continuum as an aggregate of unextended elements. *Philosophy of science*, 19(2):288-306.

HEYTING, A. 1971. Intuitionism. Amsterdam: North Holland.

HILBERT, D. 1925. Über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, 95:161-190.

HUSSERL, E. 1979. Aufsätze und Rezensionen (1890-1910). Husserliana: Nijhoff. (Edmund Husserl, *Gesammelte Werke* (Collected Works), Volume XXII, van die *Husserl Archives* in Leuven, onder leiding van Samuel Ijsseling met die hulp van Rudolf Boehm, Uitgewer met teks toevoegings, Bernhard Rang, Den Haag: Martinus Nijhoff.)

KANT, I. 1956 [1787]. Kritik der reinen Vernunft. 2. Ed. Hamburg: Felix Meiner Editions.

KAUFMANN, F. 1930. Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

KÖRNER, S. 1972. Mathematik als Wissenschaft formaler Systeme: Exposition. (*In* Meschkowski, H., *Hrsg.* Grundlagen der modernen Mathematik. S. 124-156.)

LAKOFF, G. & NÚÑEZ, R.E. 2000. Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being. New York: Basic Books.

LORENZEN, P. 1972. Methodisches Denken: das Aktual-Unendliche in der Mathematik. (*In* Meschkowski, H. *Hrsg.* Grundlagen der modernen Mathematik. S. 157-178.)

MESCHKOWSKI, H. 1972. Der Beitrag der Mengenlehre zur Grandlagenforschung. (*In* Meschkowski, H., *Hrsg.* Grundlagen der modernen Mathematik. S. 21-55.)

MESCHKOWSKI BERNAYS, P. 1976. Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

PLOTINUS. 1984. Enneads. Trans. by A.H. Armstrong. Cambridge: Harvard University Press.

POINCARÉ, H. 1910. Ueber transfinite Zahlen. (*In* Poincaré. H. Sechs Vorträge aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik. Leipzig: Teubner.) http://www.gutenberg.org/ebooks/15267 Date of access: 10 Dec. 2010.

ROBINSON, A. 1966. Non-standard analysis. Amsterdam: North Holland.

ROBINSON, A. 1979. Selected papers of Abraham Robinson. New Haven: Yale University Press.

SCHILDER, K. 1953. Christus en cultuur. Franeker: Wever.

SCHOLZ, H. 1969. Review of *Philosophy of mathematics and natural science* (H. Weyl. 1949. Mathesis Universalis: Abhandlungen zur Philosophie als strenger Wissenschaft). *The Journal of symbolic logic*: 15.

SHAPIRO, S. 2005. The Oxford handbook of philosophy of mathematics and logic. Oxford: Oxford University Press.

STRAUSS, D.F.M. 2009. Philosophy: discipline of the disciplines. Grand Rapids: Paideia.
WEYL, H. 1921. Ueber die neue Grundlagenkrise der Mathematik. *Mathematische Zeitschrift*, 10:39-79.
WEYL, H. 1966. Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. Wenen: Oldenburg.
WOLFF, K-H. 2010a. What is truth? http://www.fam.tuwien.ac.at/~wolff/what_is_truth.htm Date of access: 10 Dec. 2010.
WOLFF, K-H. 2010b. Cantors zweites Diagonalargument enthält einen Widerspruch. http://www.fam.tuwien.ac.at/~wolff/widerspruch_in_cantors_zweitem_diagonalverfahren.htm Datum van gebruik: 10 Des. 2010.
WOLFF, K-H. 2010c. Widersprüche in Beweisen der Existenz überabzählbarer Mengen (neue Fassung). http://www.fam.tuwien.ac.at/~wolff/widerueberabzae_hlbar.htm Datum van gebruik: 10 Des. 2010.
WOLFF, K-H. 2010d. Überabzählbar? http://www.fam.tuwien.ac.at/~wolff/ueberabzaehlbar.pdf Datum van gebruik: 10 Des. 2010.

Kernbegrippe:

(nie-)eksak
aftelbaar
diagonaal-bewys
oneindige totaliteit
ooraftelbaar
opeens-oneindig
suksessief-oneindig

Key concepts:

(non-)exact
at once infinite
denumerable
diagonal proof
infinite totality
non-denumerable
successive infinite